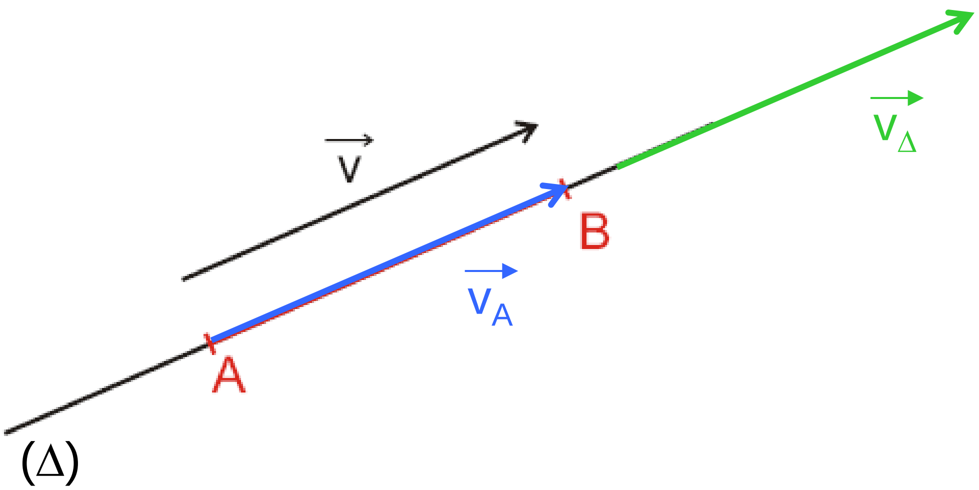
Sciences

Industrielles pour

l'Ingénieur

Vecteur pointeur / glisseur

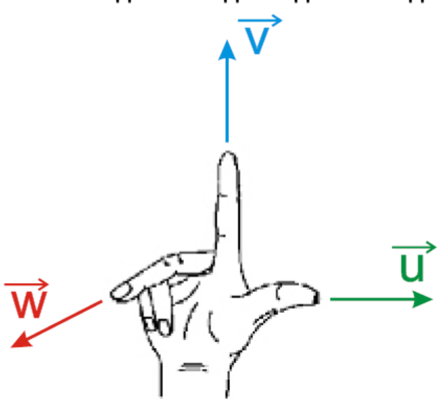


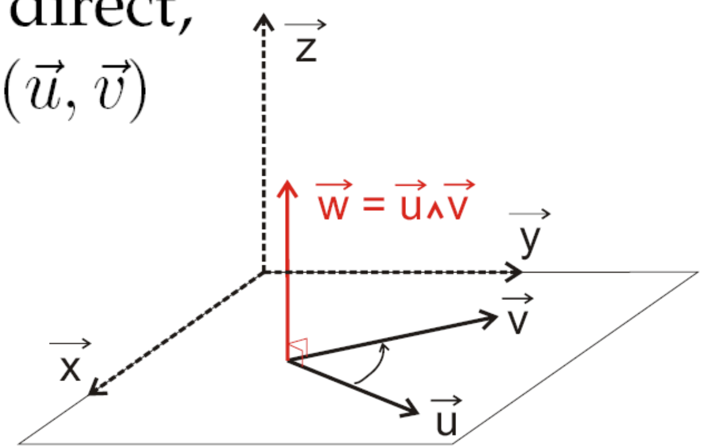
- **Produit scalaire**

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u}, \vec{v})$$

- **Produit vectoriel**

- $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$,
- $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forme un trièdre direct,
- $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times sin(\vec{u}, \vec{v})$





• Double produit vectoriel

$$\boxed{\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}).\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}).\vec{w}}$$

formule de Gibbs

• Produit mixte

$$\boxed{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})}$$

Invariance par permutation circulaire : $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$
Nullité si un vecteur apparait 2 fois : $(\vec{u}, \vec{u}, \vec{w}) = 0$
Changement de signe si permutation de 2 vecteurs : $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$

Moment d'un pointeur par rapport à un point

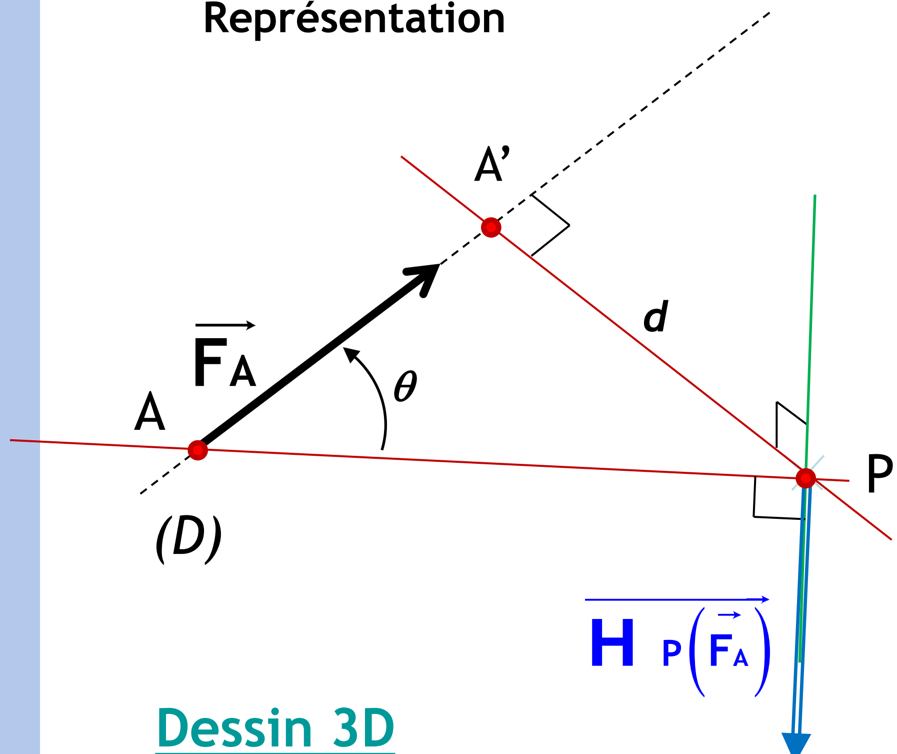
Soit $\overrightarrow{F_A}$ un pointeur

On appelle moment de $\overrightarrow{F_A}$ par rapport au point P

le pointeur $\overrightarrow{H_P(\overrightarrow{F_A})}$ tel que

$$\boxed{\overrightarrow{H_P(\overrightarrow{F_A})} = \overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{F_A}}$$

Représentation



$$\overrightarrow{H_P(\overrightarrow{F_A})} \perp \text{ au plan } (\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{F_A})$$

$$\left\| \overrightarrow{H_P(\overrightarrow{F_A})} \right\| = \left\| \overrightarrow{PA} \right\| . \left\| \overrightarrow{F_A} \right\| . \left| \sin(\theta) \right|$$

$$\left\| \overrightarrow{H_P(\overrightarrow{F_A})} \right\| = \left\| \overrightarrow{F_A} \right\| . d$$

[Dessin 3D]

Sciences
Industrielles pour
l'Ingénieur

Moment d'un pointeur par rapport à un axe

On appelle moment de $\overrightarrow{F_A}$ par rapport à un axe $\left(P,\vec{X}\right)$

$$\boxed{\overrightarrow{H_P\left(\vec{F_A}\right)}.\vec{X} = \left(\overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{F_A}\right).\vec{X}}$$

$\overrightarrow{H_P\left(\vec{F_A}\right)}.\vec{X}$ est un réel

Calcul par produit mixte, penser à utiliser les cas de nullité du produit mixte

LYCEE THIERS
depuis 1802
MARSEILLE
du Collège aux Grandes Ecoles

Sciences
Industrielles pour
l'Ingénieur

Champ de moments

Soit $\overrightarrow{H_A}$ un pointeur et $\overrightarrow{R}\wedge$ une application antisymétrique

On définit sur un domaine
D : (A, B, C, ..N)

$$\boxed{\overrightarrow{H_P} = \overrightarrow{H_A} + \overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{AP}}$$

L'ensemble des $\{\overrightarrow{H_P}\}$ sur D est un CHAMP DE MOMENTS

$\overrightarrow{H_P}$ est le moment en P

$\overrightarrow{H_A}$ est le moment en A

$\overrightarrow{R}$ est la résultante du champ

LYCEE THIERS
depuis 1802
MARSEILLE
du Collège aux Grandes Ecoles

Sciences
Industrielles pour
l'Ingénieur

Champ de moments - Relation des moments

Soit un champ $$\overrightarrow{H_P} = \overrightarrow{H_A} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AP}$$

On peut donc écrire $$\overrightarrow{H_M} = \overrightarrow{H_A} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AM}$$

$$\overrightarrow{H_N} = \overrightarrow{H_A} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AN}$$

On calcule

$$\overrightarrow{H_M} - \overrightarrow{H_N} = \left(\overrightarrow{H_A} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AM}\right) - \left(\overrightarrow{H_A} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AN}\right)$$

$$= \vec{R} \wedge \left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}\right) = \vec{R} \wedge \overrightarrow{NM}$$

♥♥♥ $$\boxed{\overrightarrow{H_M} = \overrightarrow{H_N} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{NM}}$$

Théorème de Varignon

1654 -1722

Avec la connaissance d'un élément du champ et de la résultante on connaît tous les éléments du champ

On dit que $\overrightarrow{H_M}$ et $\vec{R}$ sont les éléments de réductions en M du champ de moments

Champ de moments - Résultante

Calcul de la résultante à partir de deux éléments du champ

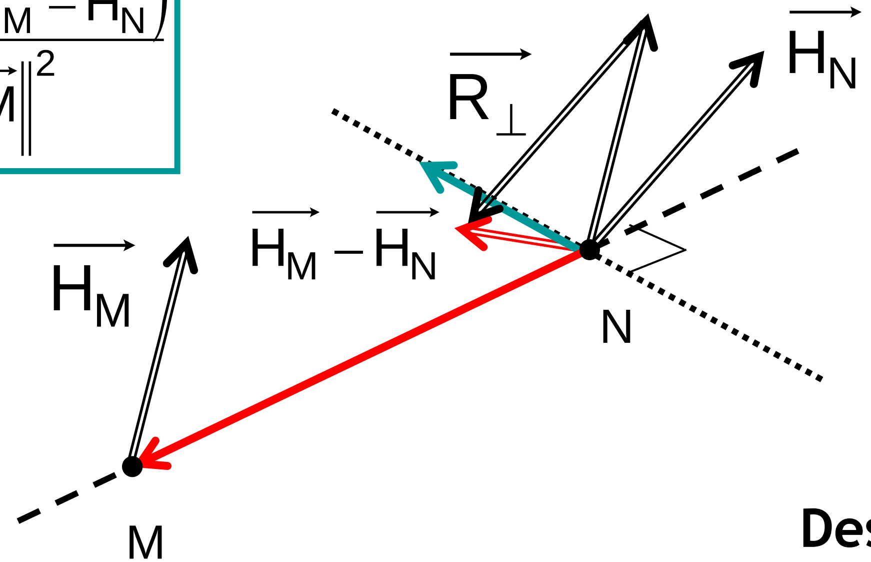
$$\overrightarrow{H_M} - \overrightarrow{H_N} = \vec{R} \wedge \overrightarrow{NM} = (\overrightarrow{R_\perp} + \cancel{\overrightarrow{R_{//}}}) \wedge \overrightarrow{NM}$$

$$\left(\overrightarrow{H_M} - \overrightarrow{H_N}\right) \wedge \overrightarrow{NM} = (\overrightarrow{R_\perp} \wedge \overrightarrow{NM}) \wedge \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NM} \wedge (\overrightarrow{NM} \wedge \overrightarrow{R_\perp})$$

$$\left(\overrightarrow{H_M} - \overrightarrow{H_N}\right) \wedge \overrightarrow{NM} = \cancel{\left(\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{R_\perp}\right)}\overrightarrow{NM} - \left(\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NM}\right)\overrightarrow{R_\perp}$$

$$\boxed{\overrightarrow{R_\perp} = \frac{\overrightarrow{NM} \wedge \left(\overrightarrow{H_M} - \overrightarrow{H_N}\right)}{\left\|\overrightarrow{NM}\right\|^2}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{R_{//}}\ ?}$$



Dessin 3D

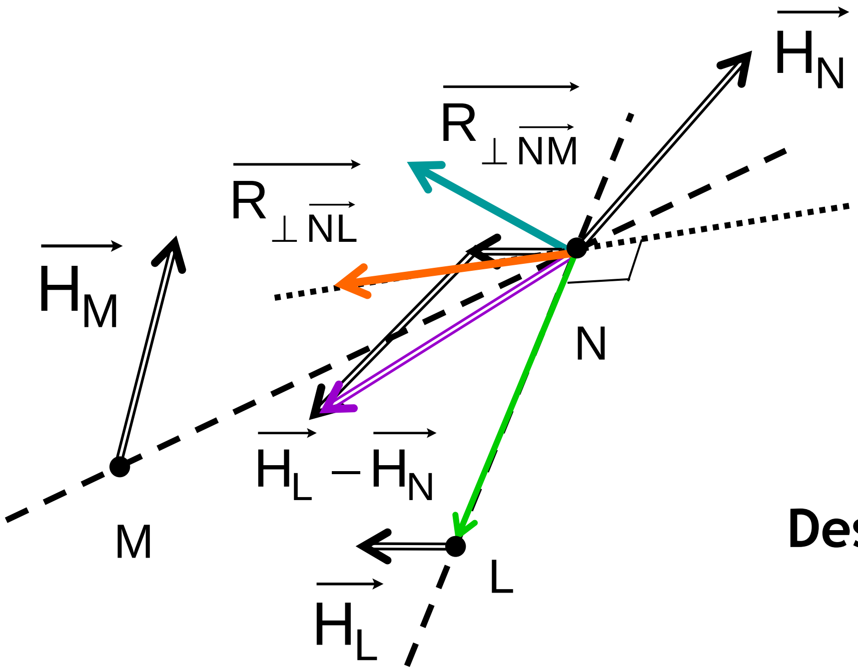
Une infinité de solutions
Il faut donc une troisième valeur du champ

Champ de moments - Résultante

Calcul de la résultante à partir de 3 éléments du champ

$$\overrightarrow{R}_{\perp \overrightarrow{NM}} = \frac{\overrightarrow{NM} \wedge \left(\overrightarrow{H_M} - \overrightarrow{H_N}\right)}{\left\|\overrightarrow{NM}\right\|^2}$$

$$\overrightarrow{R}_{\perp \overrightarrow{NL}} = \frac{\overrightarrow{NL} \wedge \left(\overrightarrow{H_L} - \overrightarrow{H_N}\right)}{\left\|\overrightarrow{NL}\right\|^2}$$



Dessin 3D

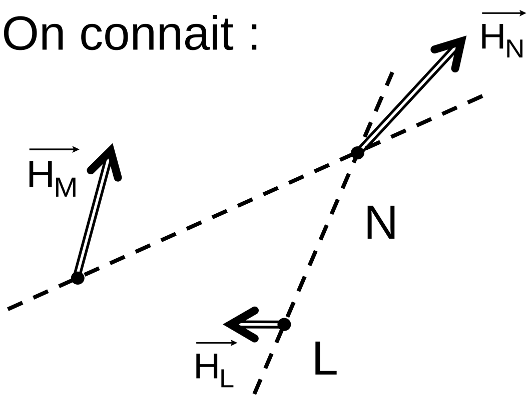
Champ de moments - Résultante

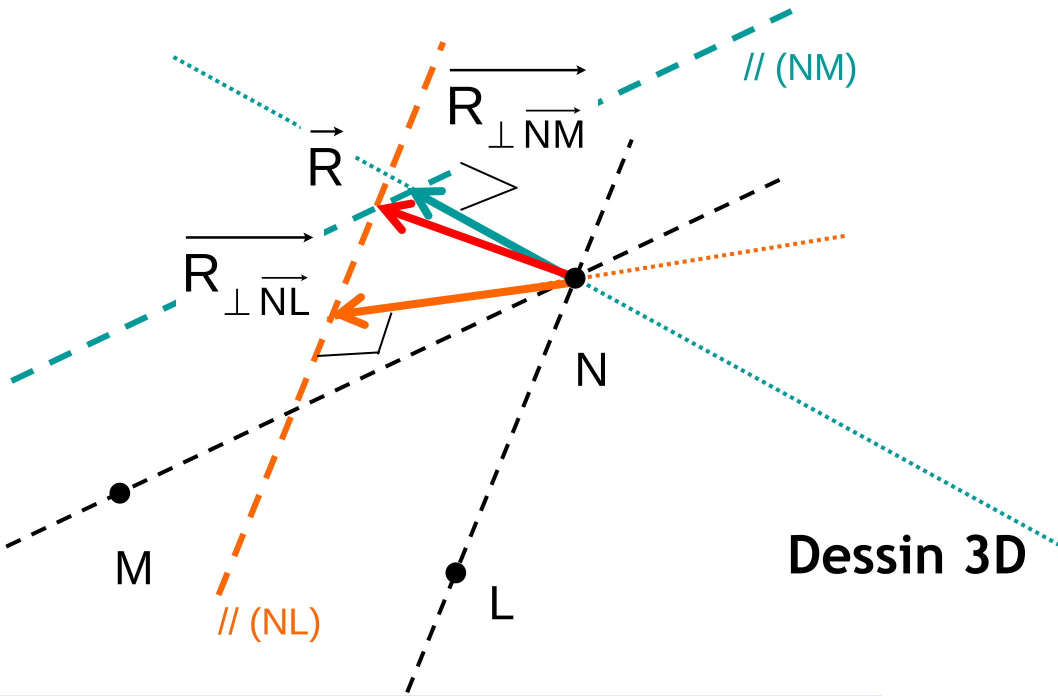
Calcul de la résultante à partir de 3 éléments du champ

$$\overrightarrow{R}_{\perp \overrightarrow{NM}} = \frac{\overrightarrow{NM} \wedge \left(\overrightarrow{H_M} - \overrightarrow{H_N}\right)}{\left\|\overrightarrow{NM}\right\|^2}$$

$$\overrightarrow{R}_{\perp \overrightarrow{NL}} = \frac{\overrightarrow{NL} \wedge \left(\overrightarrow{H_L} - \overrightarrow{H_N}\right)}{\left\|\overrightarrow{NL}\right\|^2}$$

On connait :





Dessin 3D

IL FAUT TROIS ELEMENTS DU CHAMP POUR DETERMINER LA RESULTANTE ET DONC L'ENSEMBLE DU CHAMP

♥♥♥

Champ de moments - Equiprojectivité

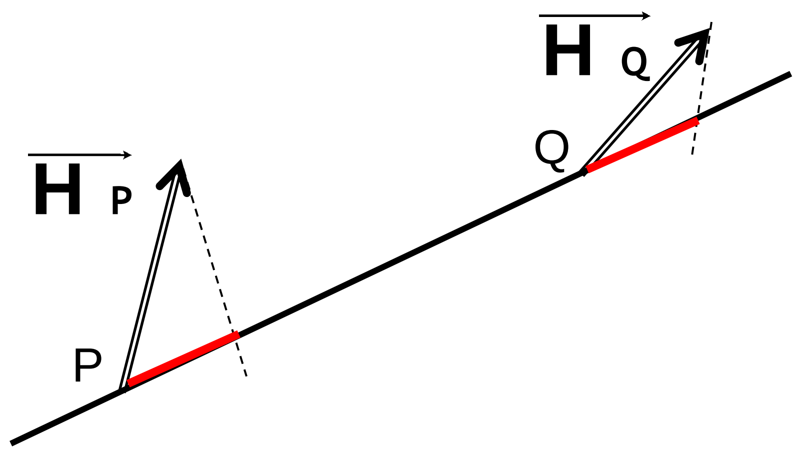
Soit 2 points P et Q d'un domaine et un champ de moment connu avec $\vec{R} \neq \vec{0}$

$$\boxed{\overrightarrow{H_P} = \overrightarrow{H_Q} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{QP}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{H_P}.\overrightarrow{QP} = \left(\overrightarrow{H_Q} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{QP}\right).\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{H_Q}.\overrightarrow{QP} + \left(\vec{R} \wedge \overrightarrow{QP}\right).\overrightarrow{QP}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{H_P}.\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{H_Q}.\overrightarrow{QP}}$$ ♥♥♥

TOUT CHAMP DE MOMENT EST EQUIPROJECTIF ET RECIPROQUEMENT



Torseurs

1 - Définition

TOUT CHAMP DE MOMENTS EST EQUIPROJECTIF ET RECIPROQUEMENT

2 - Eléments de réduction

On représente $\left\{\overrightarrow{\mathbf{H}}_{P}\right\}_{P \in D}$ par ses éléments de réduction en M sous la forme :

$$\{\mathcal{T}_{\mathrm{M}}\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R} \\ \overrightarrow{H}_{M} \end{matrix} \right\}_{M}$$

$\vec{R}$ est la résultante du Torseur

$\overrightarrow{\mathbf{H}}_{M}$ est le moment en M

$\vec{R}$ et $\overrightarrow{\mathbf{H}}_{M}$ sont les éléments de réduction en M du torseur

3 - Egalité de torseurs

$$\{\mathcal{T}_{1,\mathrm{M}}\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R}_{1} \\ \overrightarrow{H}_{1,M} \end{matrix} \right\}_{\mathrm{M}}$$

$$\{\mathcal{T}_{2,\mathrm{M}}\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R}_{2} \\ \overrightarrow{H}_{2,M} \end{matrix} \right\}_{\mathrm{M}}$$

$$\{\mathcal{T}_{2,\mathrm{M}}\}=\{\mathcal{T}_{1,\mathrm{M}}\} \Longleftrightarrow \overrightarrow{R}_{1} = \overrightarrow{R}_{2} \text{ et } \overrightarrow{H}_{1,\mathrm{M}} = \overrightarrow{H}_{2,\mathrm{M}}$$

LYCEE THIERS
depuis 1802
MARSEILLE
du Collège aux Grandes Ecoles

Sciences

Industrielles pour

l'Ingénieur

Torseurs

$$\{\mathcal{T}_{1,\mathrm{M}}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}_1 \\ \overrightarrow{H}_{1,M} \end{array} \right\}_{\mathrm{M}}$$

$$\{\mathcal{T}_{2,\mathrm{M}}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}_2 \\ \overrightarrow{H}_{2,M} \end{array} \right\}_{\mathrm{M}}$$

Somme de deux torseurs

$$\{\mathcal{T}_{1,\mathrm{M}}\} + \{\mathcal{T}_{2,\mathrm{M}}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}_1 + \overrightarrow{R}_2 \\ \overrightarrow{H}_{1,M} + \overrightarrow{H}_{2,M} \end{array} \right\}_{\mathrm{M}}$$ ♥♥

La somme de deux torseurs est un torseur.
Le calcul se conduit avec les éléments de réductions définis en un ***même point****.*

Produit de deux torseurs : *comoment*

♥♥♥ $$\boxed{c = \{\mathcal{T}_{1,\mathrm{M}}\} \otimes \{\mathcal{T}_{2,\mathrm{M}}\} = \overrightarrow{R}_1.\overrightarrow{H}_{2,M} + \overrightarrow{R}_2.\overrightarrow{H}_{1,M}}$$

Le comoment(produit) de deux torseurs est un scalaire.
Les deux moments doivent être pris au ***même point*** *mais le résultat « c » ne dépend pas du point de calcul.*

Torseurs

Invariant scalaire

L'invariant vectoriel du torseur est la résultante

$$\boxed{\overrightarrow{H_P} = \overrightarrow{H_Q} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{QP}}$$

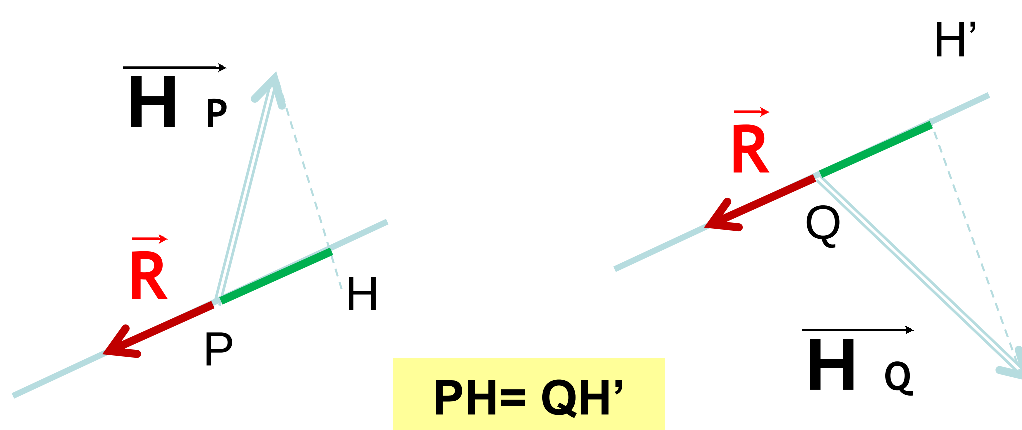
On multiplie scalairement par la résultante

$$\boxed{\vec{R}.\overrightarrow{H_P} = \vec{R}.\overrightarrow{H_Q} + \underbrace{\vec{R}.\left(\vec{R} \wedge \overrightarrow{QP}\right)}_{}}$$

$\rightarrow$ *= 0 : produit mixte*

♥♥ $$\boxed{\vec{R}.\overrightarrow{H_P} = \vec{R}.\overrightarrow{H_Q} = I}$$

I : invariant scalaire



LYCEE THIERS
depuis 1802
MARSEILLE
du Collège aux Grandes Ecoles

Sciences
Industrielles pour
l'**I**ngénieur

Torseurs

Point central - axe central

P est un point central du torseur si en P $\boxed{\vec{R} \wedge \overrightarrow{H}_P = \vec{0}}$ ♥♥♥

Soit P point central et M un point quelconque

$$\vec{R} \neq \vec{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{H}_M \neq \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{R} \wedge \overrightarrow{H}_M \neq \vec{0} \qquad \overrightarrow{H}_P = \overrightarrow{H}_M + \vec{R} \wedge \overrightarrow{MP}$$

On cherche le lieu des P en connaissant le point M donc on cherche

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MP}_{\perp \vec{R}} + \overrightarrow{MP}_{// \vec{R}}$$

$$\vec{R} \wedge \overrightarrow{H_P} = \vec{R} \wedge \overrightarrow{H_M} + \vec{R} \wedge \left(\vec{R} \wedge \overrightarrow{MP}\right)$$

$$\vec{0} = \vec{R} \wedge \overrightarrow{H_M} + \vec{R} \wedge \left(\vec{R} \wedge (\overrightarrow{MP_\perp} + \cancel{\overrightarrow{MP_{//}}})\right)$$

$$\vec{0} = \vec{R} \wedge \overrightarrow{H_M} + \left(\vec{R} \cdot \cancel{\overrightarrow{MP_\perp}}\right)\vec{R} - \left(\vec{R} \cdot \vec{R}\right)\overrightarrow{MP_\perp}$$

$$\overrightarrow{MP}_{\perp \vec{R}} = \frac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{H_M}}{\|\vec{R}\|^2} \qquad \overrightarrow{MP}_{// \vec{R}} \ \text{quelconque}$$

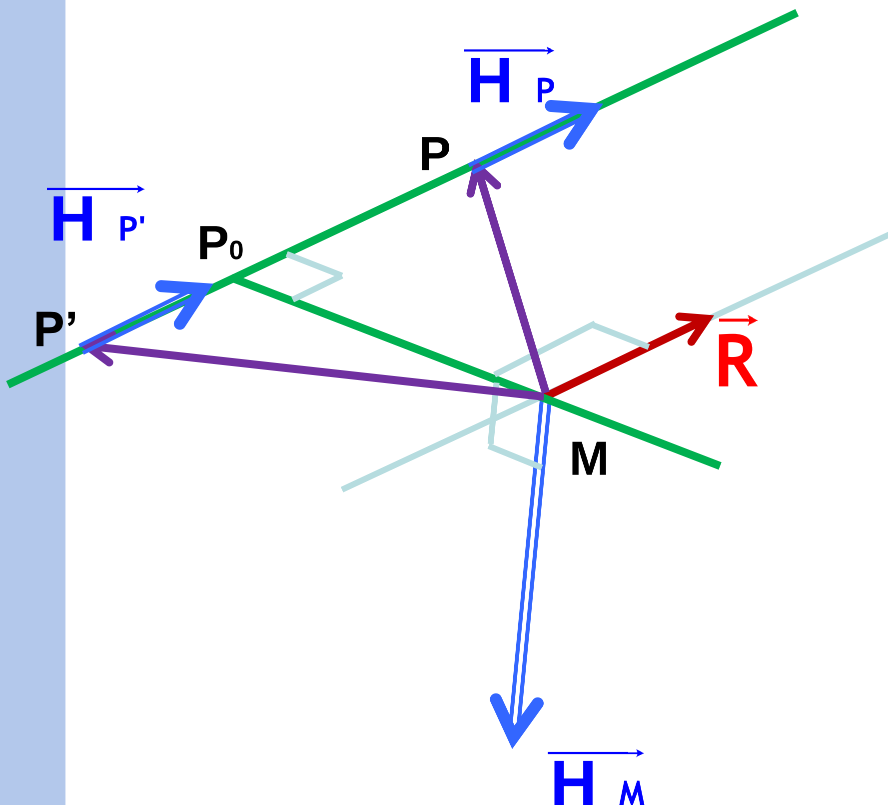
$$\boxed{\overrightarrow{MP} = \frac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{H}_M}{\|\vec{R}\|^2} + \lambda \cdot \vec{R}}$$ ♥♥♥

LYCEE THIERS
depuis 1802
MARSEILLE
du Collège aux Grandes Ecoles

Sciences
Industrielles pour
l'Ingénieur

Torseurs

Point central - axe central



$$\overrightarrow{MP} = \frac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{H_M}}{\vec{R}^2} + \lambda . \vec{R}$$

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MP_0} + \lambda . \vec{R}$$

$$\overrightarrow{MP_0} = \frac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{H_M}}{\vec{R}^2}$$

$$\overrightarrow{MP_0} \perp \vec{R} \text{ et } \overrightarrow{H_M}$$

Sur l'axe central

$$\vec{R} \wedge \overrightarrow{H_P} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R} = \alpha . \overrightarrow{H_P}$$

Torseurs

Point central - axe central

Sur l'axe central $\vec{R} \wedge \overrightarrow{H_P} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{H_P} = \mu.\vec{R}$

or $\overrightarrow{H_P} = \overrightarrow{H_M} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{MP}$

$\mu.\vec{R} = \overrightarrow{H_M} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{MP}$ *donc* $\mu.\vec{R}^2 = \vec{R} . \overrightarrow{H_M}$

$$\boxed{\mu = \frac{\vec{R} . \overrightarrow{H_M}}{\vec{R}^2} = \frac{I}{\vec{R}^2}}$$

μ=cste , pas du torseur

Propriété 1 *P est un point central* $\boxed{\overrightarrow{H_P} = \mu.\vec{R} = \frac{I.\vec{R}}{\vec{R}^2} = \overrightarrow{cst}}$ ♥

Le moment est constant sur l'axe central

Propriété 2 *P est un point central et M n'appartient pas à l'axe central*

$$\boxed{I = \vec{R}.\overrightarrow{H_P} = \vec{R}.\overrightarrow{H_M}}$$

$$\boxed{I = \|\vec{R}\|.\|\overrightarrow{H_P}\| = \|\vec{R}\|.\|\overrightarrow{H_M}\|.\cos(\vec{R}, \overrightarrow{H_M})}$$

La norme du moment est minimale sur l'axe central ♥

Propriété 3 Si $\overrightarrow{H_N} = \vec{0}$ alors N appartient à l'axe central ♥

LYCEE THIERS
depuis 1802
MARSEILLE
du Collège aux Grandes Ecoles

Sciences
Industrielles pour
l'Ingénieur

Torseurs

Torseurs particuliers

Torseur nul

$$\{\mathcal{T}_M\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_M$$

Torseur couple

$$\{\mathcal{T}_M\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{H}_M \end{matrix} \right\}_M$$

$\vec{R} = \vec{0}$

Tous les points sont centraux

Torseur glisseur

$$\{\mathcal{T}_P\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_P$$

Il existe P/ $\overrightarrow{H_P} = \vec{0}$

On le reconnaît en calculant I = 0 ♥

Un torseur glisseur est un torseur dont le moment est nul sur l'axe central

$$\boxed{\vec{R}.\overrightarrow{H}_M = 0 = I}$$

$$\boxed{\text{si } \vec{R} \neq \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{H}_M \neq 0 \Rightarrow \vec{R} \perp \overrightarrow{H}_M}$$

Si P central : $\vec{R} \wedge \overrightarrow{H}_P = \vec{0}$ **et** $\vec{R}.\overrightarrow{H}_P = 0 \Rightarrow \overrightarrow{H}_P = \vec{0}$

LYCEE THIERS
depuis 1802
MARSEILLE
du Collège aux Grandes Ecoles

Sciences
Industrielles pour
l'**I**ngénieur

Projection d'un vecteur sur un plan